Matemáticas 1

EJERCICIOS RESUELTOS:

Funciones de varias variables

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

1 Dada las superficies

$$(1) \qquad z = x^2 + y^2 \qquad\qquad (2) \qquad y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$$

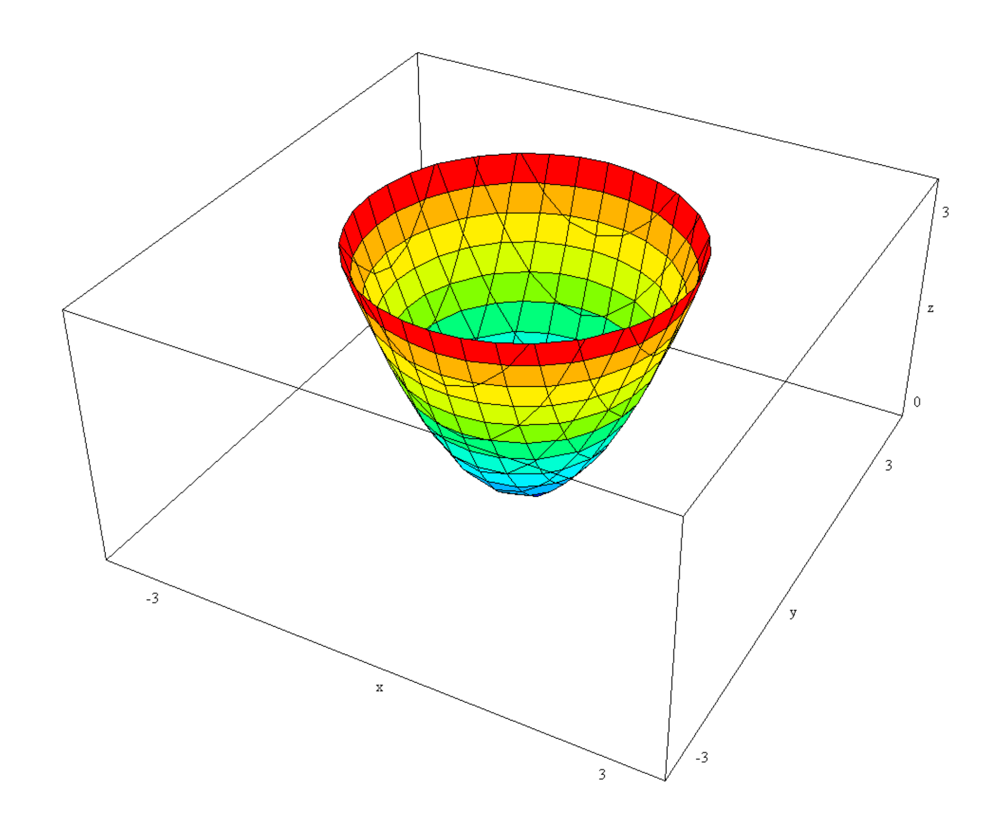
Se pide:

(a) Representar las trazas

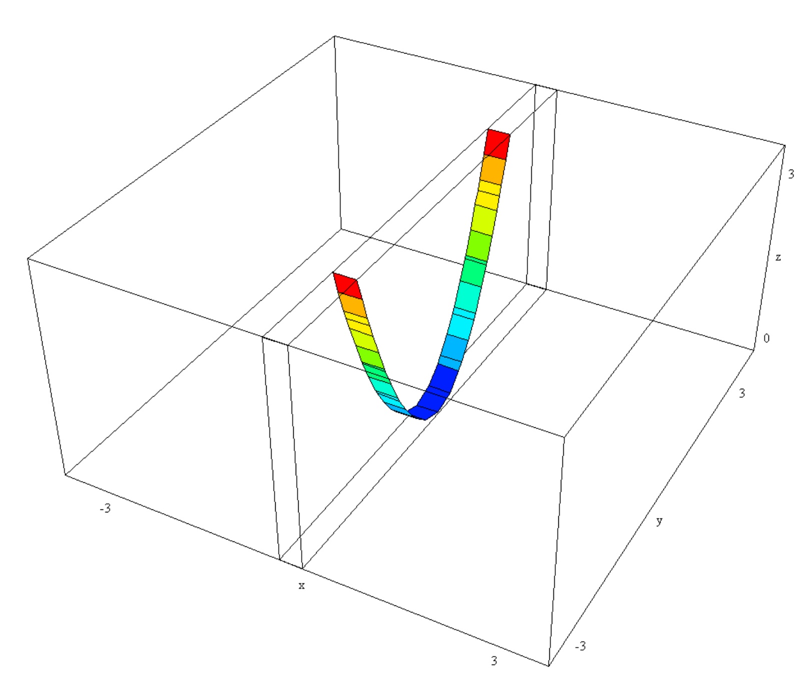
(b) Obtener las curvas de nivel

(c) Realizar un bosquejo de su gráfica

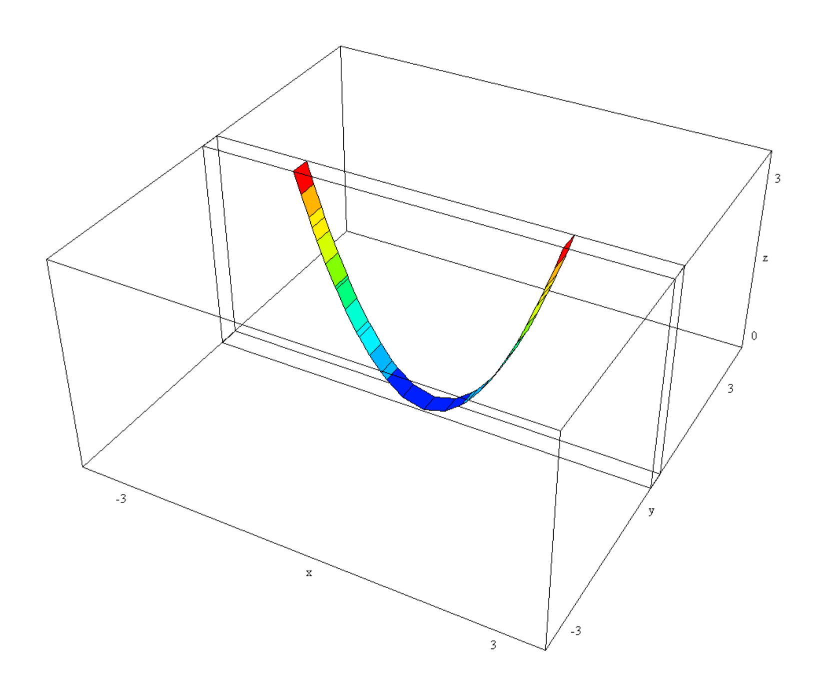
Se trata de un paraboloide



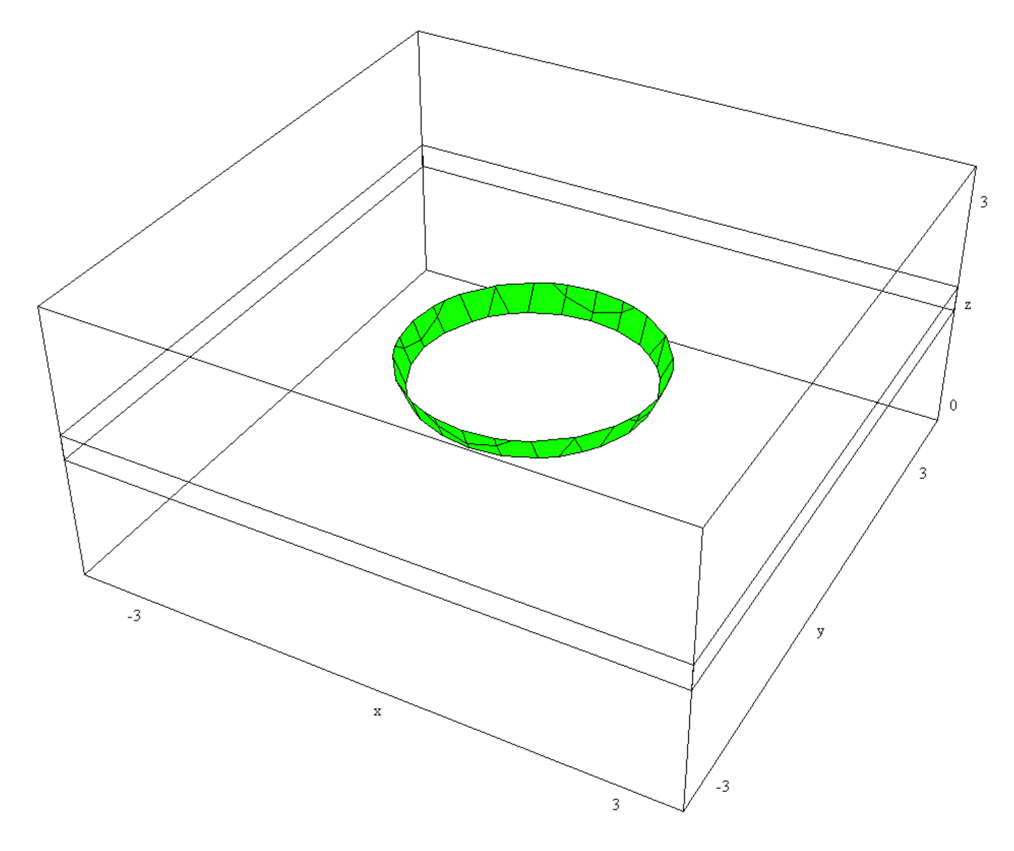
Al cortar por planos x=cte: Parábolas $z = cte + y^2$

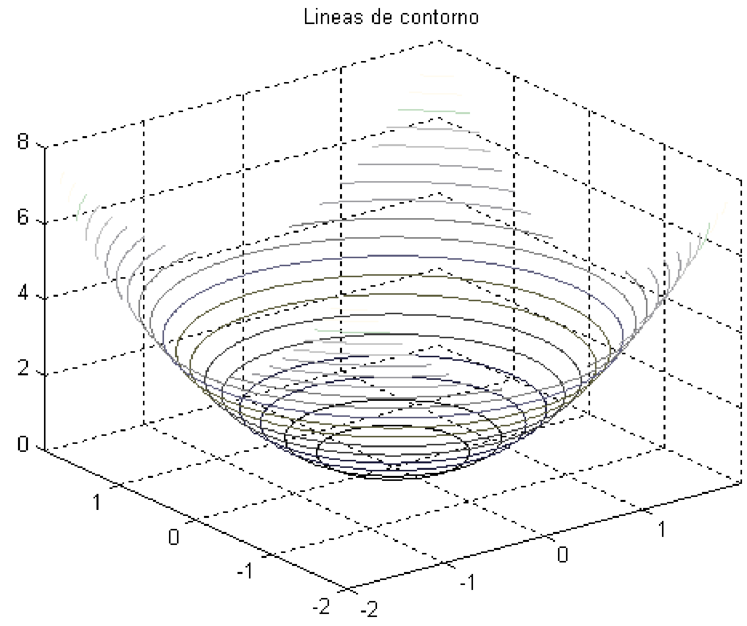


Al cortar por planos y=cte: Parábolas $z = x^2 + cte$

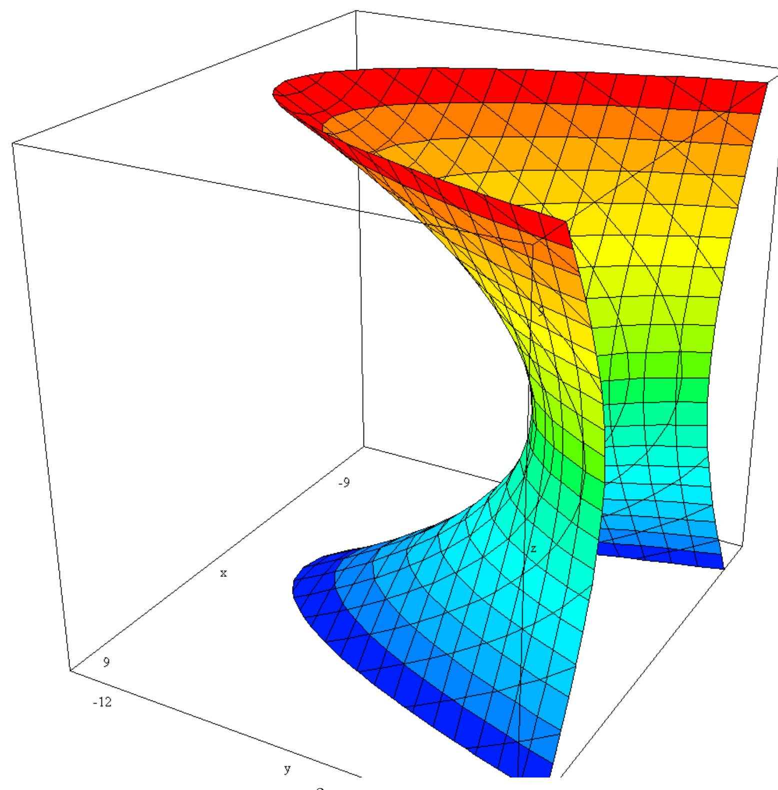


Al cortar por planos z=cte (curvas de nivel): Circunferencias $Cte = x^2 + y^2 \quad (Cte > 0)$

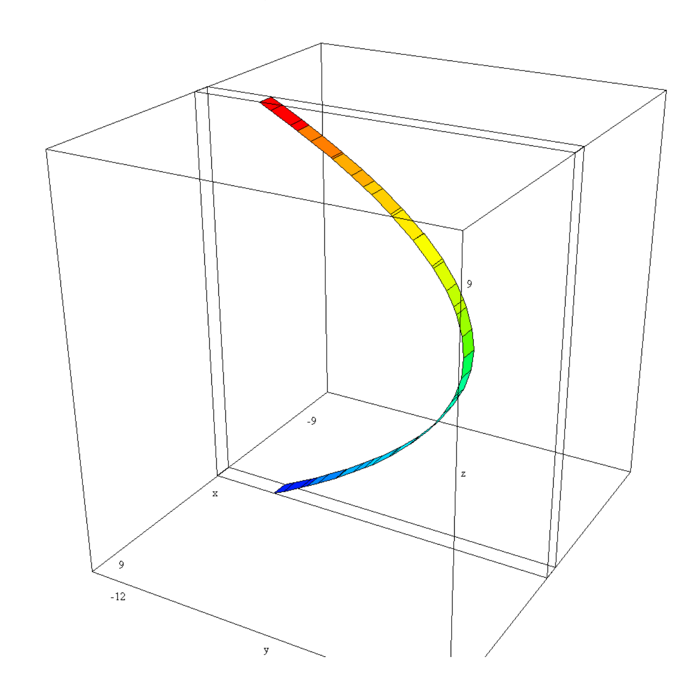




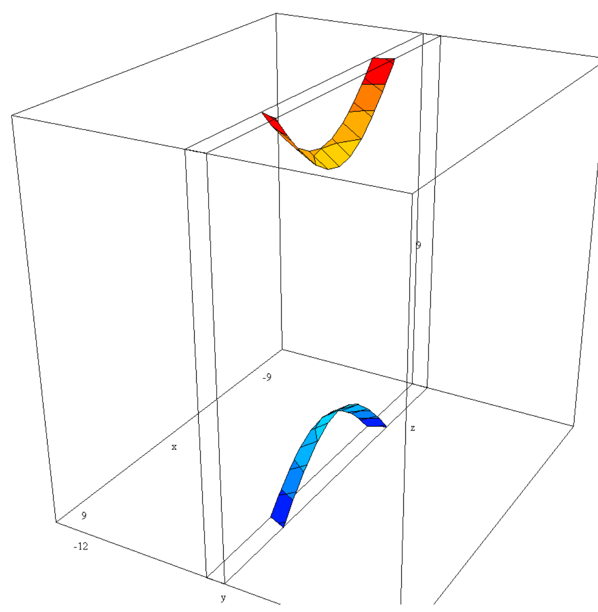
(2) Se trata de un hiperboloide



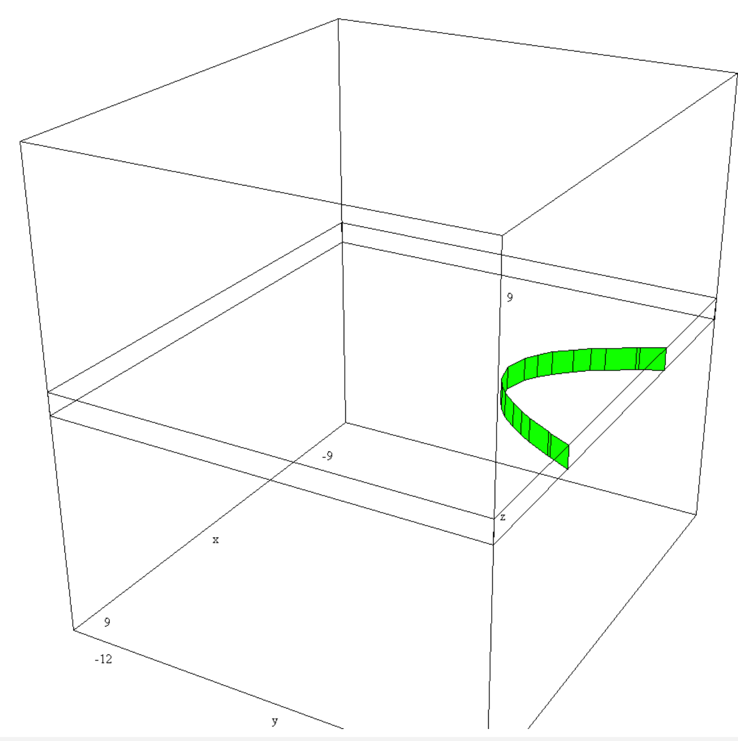
Curvas x=cte: Parábolas $y = Cte - \frac{z^2}{9}$



Curvas y=cte: Hipérbolas $Cte = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$

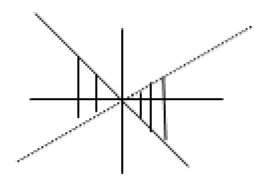


Curvas: z=cte: Parábolas $y = \frac{x^2}{4} - Cte$



2 Representar el dominio de la función $f\left(x,y\right) = \sqrt{x^2 - y^2}e^{\frac{x+y}{x-y}}$

El dominio es el conjunto de los puntos $Domf = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x.-y)(x+y) \geq 0, \ \ x \neq y \right\}$ es decir, los puntos del plano comprendidos entre las rectas x=y, x=-y salvo los de la recta x=y, gráficamente



3 Se considera la función $f(x,y) = e^{xy} + \frac{x}{y} + sen((2x+3y)\pi)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_x(0,1)$, $f_y(2,-1)$, $f_{xx}(0,1)$, $f_{xy}(2,-1)$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y} + 2\pi\cos((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi\cos((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - (2\pi)^2 sen((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2} - 6\pi^2 sen((2x+3y)\pi)$$

$$f_x(0,1) = 1 + 1 + 2\pi\cos(3\pi) = 2 - 2\pi$$

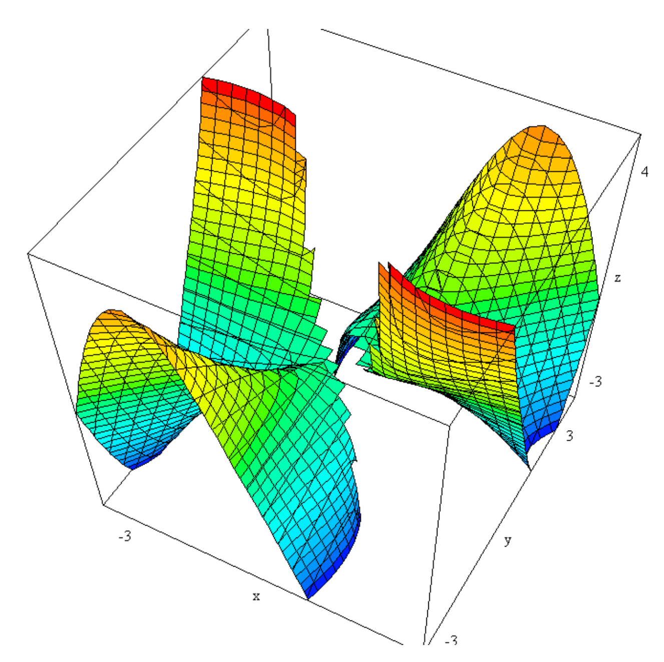
4 Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 - x^4 y}{x^3 + y^3} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$$

a) Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

b) Calcule $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$

c) Es $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$?



Solución:

a) $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(0+h)0^4-(0+h)^4 0}{(0+h)^3+0^3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^4} = 0$$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0(0+h)^4-0^4(0+h)}{0^3+(0+h)^3}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^4} = 0$$

b) Supongamos ahora que $\left(x,y\right)$ *con* $x \neq -y$, entonces

$$f_x = \frac{(y^4-4x^3y)(x^3+y^3)-(xy^4-x^4y)(3x^2)}{(x^3+y^3)^2}$$

$$f_y = \frac{(4xy^3-x^4)(x^3+y^3)-(xy^4-x^4y)(3y^2)}{(x^3+y^3)^2}$$

En los puntos $\left(a,-a\right)$ se tendrá:

$$f_x(a,-a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,-a)-f(a,-a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(a+h)(-a)^4 - (a+h)^4(-a)}{(a+h)^3 + (-a)^3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)(-a)^4 - (a+h)^4(-a)}{h\left[(a+h)^3 + (-a)^3\right]}$$

Como el numerador tiende a $2a^5$ y el denominador a cero este límite no existe para $a \neq 0$.

c) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to o} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\frac{((0+h)^4 - 4.0^3.(o^3 + (0+h)^3) - (0(0+h)^4 - 0^4(0+h))(0)}{(0^3 + (0+h)^3)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{h^7}{h^7} = 1$$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to o} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\frac{(4(0+h)0^3 - (0+h)^4).((0+h)^3 + 0^3 - ((0+h)0^4 - (0+h)^4 0)(0)}{(0^3 + (0+h)^3)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{-h^7}{h^7} = -1$$

Luego no se verifica que $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

5

El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función $P(S,C)$. ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$? ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$?

Solución:

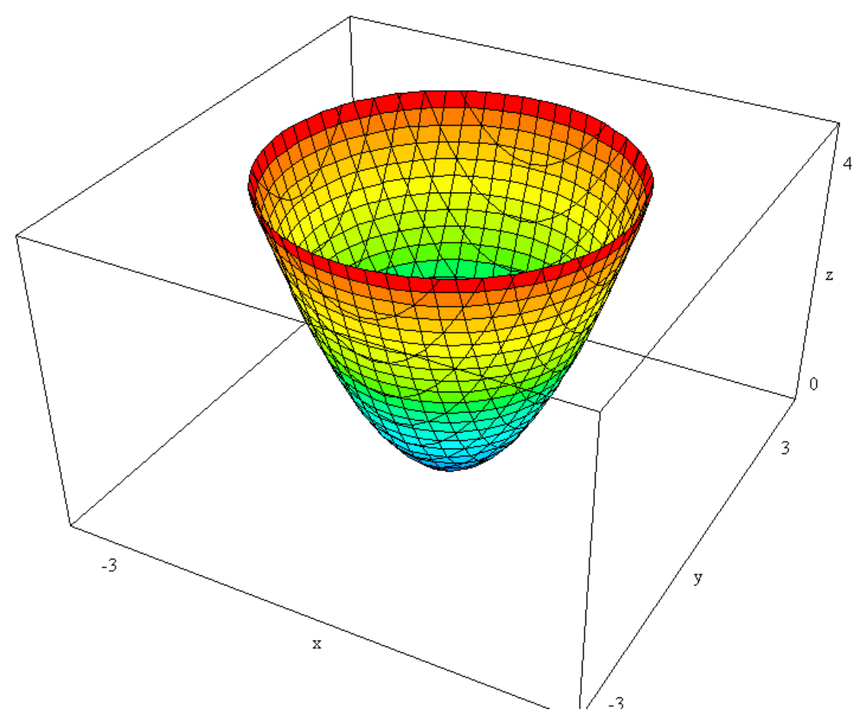
Si $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$ significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Parece razonable.

Si $\dfrac{\partial P}{\partial S} < 0$ significaría que al aumentar la superficie del piso el precio disminuiría.

Esto no parece lógico.

Funciones diferenciables. Diferencial de una función de dos variables

6 Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ pruebe que es diferenciable en (0,0)



Solución:

Forma 1.- Utilizando la definición

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(0+h)^2-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h} = 0$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (análogo al apartado a) ya que la función es simétrica)

c) $\mathrm{f}\big((0,0)+(\Delta x,\Delta y)\big) = f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}$

Entonces

$$f(\Delta x, \Delta y) = 0 + 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}} = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}$$

Veamos si $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$

Utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi]}} \left|\rho\right| = 0$$

Luego la función es diferenciable.

Forma 2.-

Como en todos los puntos del plano existen las derivadas parciales y además son continuas la función es diferenciable en todo $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$. En particular en el (0, 0).

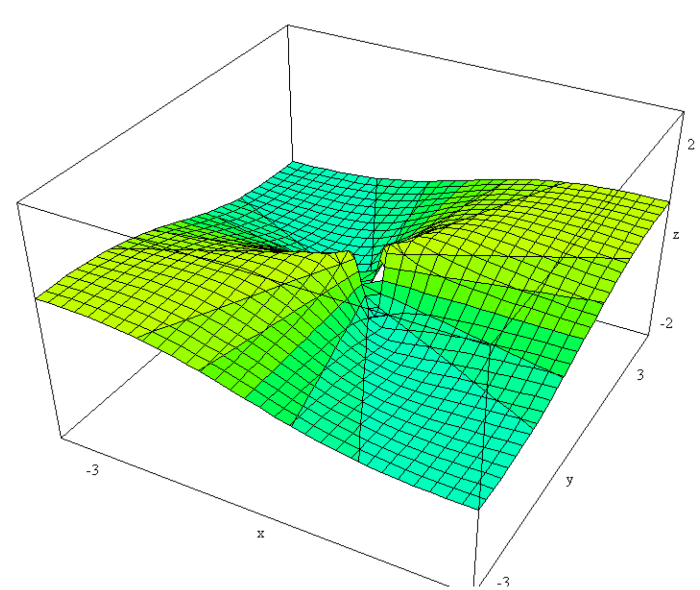
7 Considere la función f(x,y) dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Halle $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)$

b) ¿Es f(x,y) diferenciable en (0,0)?

c) ¿Qué puede concluir de (a) y (b) respecto a la diferenciabilidad de la función?



Solución:

a) Calculamos las derivadas parciales en el origen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(0+h)-0}{(0+h)^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0.(0+h)}{0^2+(0+h)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

b) Usemos la definición de diferenciabilidad:

$$f\big((0,0)+(\Delta x,\Delta y)\big)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2},\quad \text{luego:}$$

$$f(\Delta x,\Delta y)=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}\quad \text{entonces}\quad \varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{\dfrac{\Delta x.\Delta y}{\left(\Delta x\right)^2.\left(\Delta y\right)^2}}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\left(\Delta x\right).\left(\Delta y\right)}{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left(\Delta x\right).\left(\Delta y\right)}{\left(\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2\right)^{3/2}},$$

pero calculando los límites radiales:

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=m\Delta x}} \frac{(\Delta x).(\Delta y)}{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)^{3/2}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x).(m\cdot\Delta x)}{\left((\Delta x)^2+(m\cdot\Delta x)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{m}{\Delta x\left(1+m^2\right)^{3/2}}$$

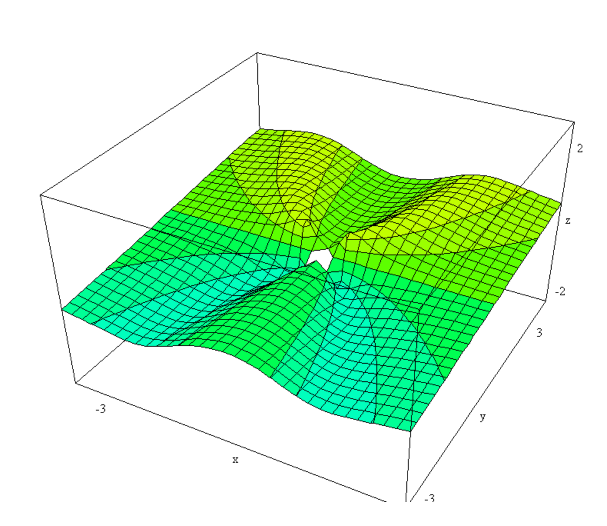
nos damos cuenta que no existe este límite. Por lo tanto, la función dada, no es diferenciable en el (0,0)

c) Podemos concluir que el hecho de que las derivadas parciales existan en el (0,0) no asegura diferenciabilidad en el punto

8 Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1. Halle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
2. ¿En qué direcciones v existe $Df_v(0,0)$?
3. ¿Es f(x,y) diferenciable en (0,0)?



Solución:

a) Si $\left(x,y\right) \neq \left(0,0\right) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right) = \dfrac{2xy^3 - 2x^5y}{\left(x^4 + y^2\right)^2}$

Si (x,y) = (0,0), entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(0+h)^2.0}{(0+h)^4+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^5} = 0$$

Así:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3 - 2x^5y}{\left(x^4+y^2\right)^2} & \text{si } \left(\text{x,y}\right) \neq \left(0,0\right) \\ 0 & \text{Si } \left(\text{x,y}\right) = \left(0,0\right) \end{cases}$$

Análogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{x^6 - x^2y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} & \text{si } \left(\text{x,y}\right) \neq \left(0,0\right) \\ 0 & \text{Si } \left(\text{x,y}\right) = \left(0,0\right) \end{cases}$ (PRUÉBELO ¡!!!)

b) Sea $\vec{v} = (a,b)$ tal que ||v||=1

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\vec{v})-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{v})-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{at^2bt}{a^4t^4+b^2t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{a^2bt^3}{t\left(a^4t^4+b^2t^2\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3(a^2b)}{t^3\left(a^4t^2+b^2\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{a^2b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2}{b}$$

siempre que b sea distinto de cero.

En el caso de que b sea cero el vector v será (1, 0) y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\left(1,0\right))-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0}{t^4+0}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

Podemos concluir que la función posee derivadas direccionales en (0,0) en cualquier dirección.

c) Para saber si f (x,y) es diferenciable en (0,0), resulta más sencillo en este caso, analizar primero la continuidad en (0,0). Veamos si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: tomemos el camino $y = mx^2$

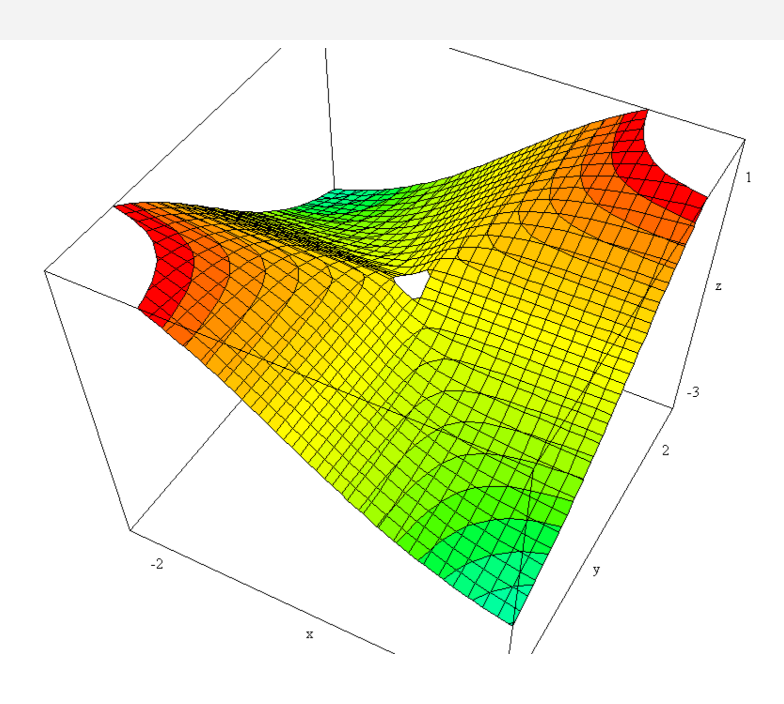
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Como el límite depende de m (de la parábola) se puede concluir que f(x,y) no es continua en (0,0) y en consecuencia, f(x,y) no es diferenciable en (0,0).

Notar que la existencia de derivadas parciales y derivadas direccionales no implica diferenciabilidad.

9 Estudia la diferenciabilidad de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Solución:

(a) Calculamos inicialmente las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

por simetría de la función $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Utilizamos la definición para ver si es diferenciable. La función será diferenciable si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Se tiene que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

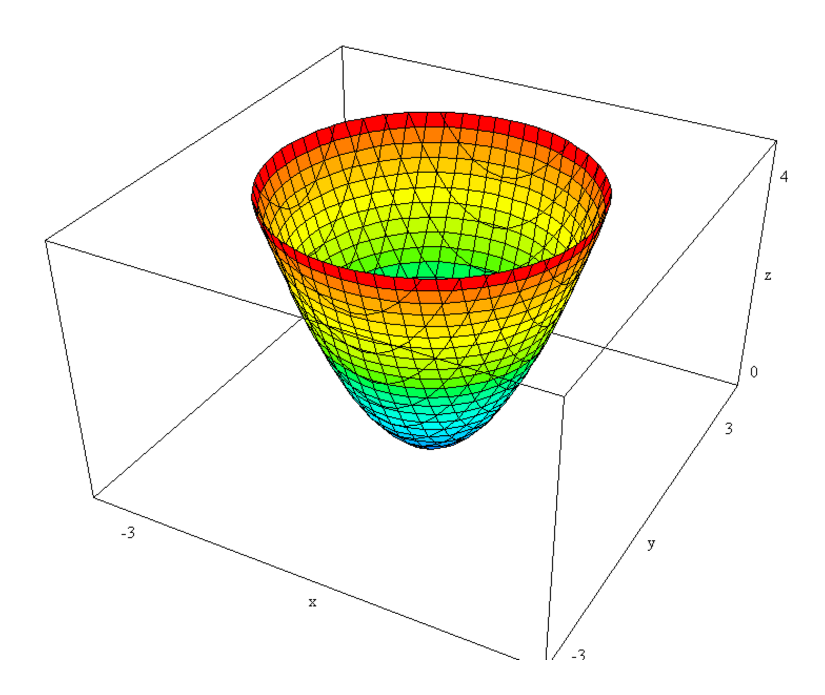
Este último límite no tiende a cero (basta calcular los límites radiales o pasar a coordenadas polares).

Por lo tanto la función no es diferenciable en el origen.

Relación entre la diferencial y la derivada direccional. Gradiente.

10 El conjunto de los puntos (x, y) con $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$ es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano XY. Supongamos que se caliente ese cuadrado de tal manera que $T(x,y) = x^2 + y^2$ es la temperatura en el punto P(x, y). ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto $P_o(2,5)$?

Indicación: El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial $C(x,y)$ porque su valor en cada punto depende de las coordenadas de éste. Sabemos por física que $C(x,y)$ será perpendicular a las curvas isotermas $T(x,y) = c$ donde c es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que $C = -K\nabla T$ donde K es una constante positiva (llamada conductividad térmica). Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.



Solución:

Como $T(3,4)=25$ el punto P está en la isoterma $T(x,y)=25$, que es un cuadrante de la circunferencia $x^2+y^2=25$. Sabemos que el flujo de calor en $P_o(2,5)$ es $C_o=-K\nabla T_o$.

Como $\nabla T=2x\vec{i}+2y\vec{j}$ se tiene que $\nabla T_o=6\vec{i}+8\vec{j}$. Así el flujo de calor en Po es: $C_o=-K\left(6\vec{i}+8\vec{j}\right)$. Como la conductividad térmica es positiva se puede afirmar que el calor fluye en Po en el sentido del vector unitario:

$$\vec{u}=\frac{-\left(6\vec{i}+8\vec{j}\right)}{\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$$

11 Hallar a y b para que la derivada direccional máxima de la función $e^{ax+by}\cos(x+y)-z=0$ en el punto $(0,0)$ sea $3\sqrt{2}$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante

Solución.-

La función $z=e^{ax+by}\cos(x+y)$ es continua por ser composición de funciones continuas y es diferenciable por ser las derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

$$z'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=ae^{ax+by}\cos(x+y)-e^{ax+by}sen(x+y)$$
$$z'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=be^{ax+by}\cos(x+y)-e^{ax+by}sen(x+y)$$

Esto significa que la derivada direccional en un punto siguiendo una dirección se puede obtener como el producto escalar de la dirección por el gradiente en el punto considerado.

$$D_uf(0,0)=\langle\nabla f(0,0),u\rangle=3\sqrt{2}$$

Por otro lado el gradiente nos marca la dirección donde la derivada direccional es máxima que en este caso es además la bisectriz del primer cuadrante luego en este caso:

$$\left\|\nabla f\left(0,0\right)\right\| = 3\sqrt{2} \qquad u = \frac{1}{\left\|\nabla f\left(0,0\right)\right\|}\nabla f\left(0,0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calculando el gradiente en el origen:

$$\nabla f\left(0,0\right) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

se tiene que cumplir que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2} \qquad u = \left(\frac{a}{3\sqrt{2}},\frac{b}{3\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Rightarrow a = b$$

Por lo tanto, resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$a = b = 3$$

Determinar, si es posible, un vector unitario $\vec{u}$ de modo que la derivada direccional de la función $f\left(x,y,z\right) = \dfrac{1-xy}{z}$ en el punto (1, 1, 1) y en la dirección de $\vec{u}$ sea $\sqrt{2}$.

Puntuación: 10 puntos

En el punto (1, 1, 1) la función f es diferenciable por tener derivadas parciales primeras continuas, luego la derivada direccional es:

$$D_u f\left(1,1,1\right) = \left\langle \nabla f\left(1,1,1\right),\vec{u}\right\rangle = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1-xy}{z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,1,1\right) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,1,1\right) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\left(1,1,1\right) = 0$$

$$D_u f\left(1,1,1\right) = \left\langle\left(-1,-1,0\right),\left(a,b,c\right)\right\rangle = \sqrt{2}$$

Se trata de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -a-b=\sqrt{2} \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a-\sqrt{2} \\ c^2=-1-2a^2-2\sqrt{2}a=-\left(\sqrt{2}a+1\right)^2<0\ NO \end{array}\right\}$$

Que no tiene solución. Luego no es posible encontrar el vector pedido.

12 De una función $z=f(x,y)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto (1, 2) es: $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto (1, 2) con el punto (3,4)? Justificar la respuesta.

La dirección en la que nos piden calcular la derivada direccional es:

$$v=(3-1,4-2)=(2,2)\Rightarrow u=\frac{v}{\|v\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Como el plano tangente en el punto (1, 2) es

$$2x+3y+4z=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z=\frac{1}{4}\quad (I)$$

que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)=z-f(1,2)\quad (II)$$

se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{-1}{2}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{-3}{4}$$

sin más que igualar los coeficientes en las dos expresiones (I) y (II)

Luego la derivada direccional pedida es:

$$D_u\left(f,(1,2)\right)=\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right),u\right\rangle=\left\langle\left(\frac{-1}{2},-\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle=\frac{-5}{4\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

13 Sea $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{2x^2 - y^2 - xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

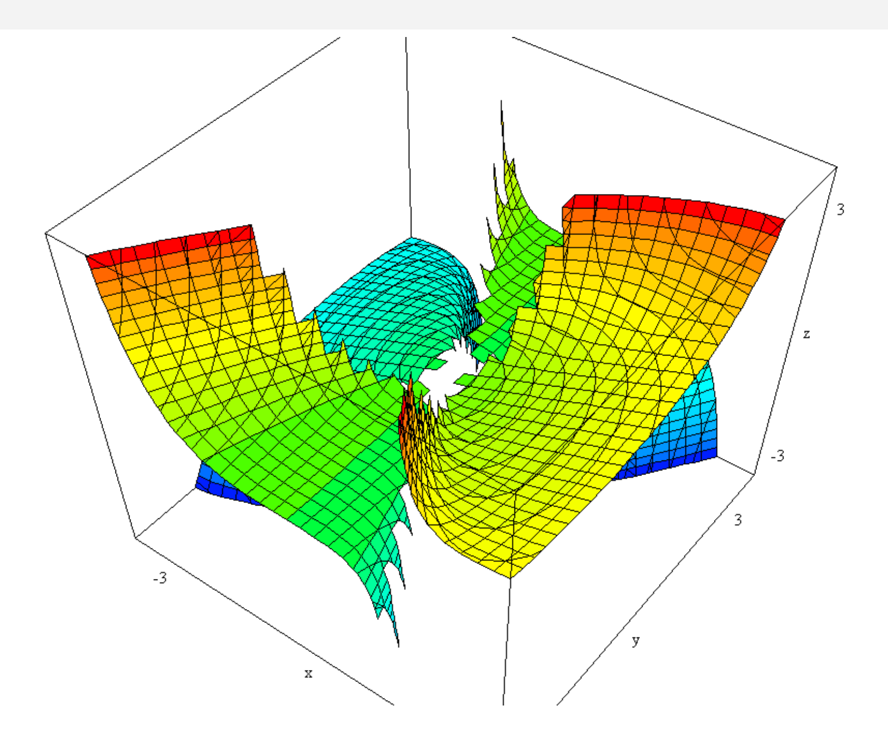
A) Dibujar el conjunto de puntos del plano donde f no está definida.

B) Calcular el límite direccional de la función en el origen a lo largo de la curva: $y = x + x^2$

C) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en el origen

D) Calcular los valores de $f_x(0,0)$ y $f_{xy}(0,0)$

E) Determinar en el punto P (2,-1) el valor de la derivada en una dirección que forma 60º con el eje OX positivo.



Solución:

A) f(x, y) no está definida en aquellos puntos que anulen el denominador

$$2x^2 - y^2 - xy = 0 \Leftrightarrow y^2 + xy - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2} = \begin{cases} x \\ -2x \end{cases}$$

Es decir, la función f no está definida sobre las rectas y = x e y = -2x.

B) El límite pedido es:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x+x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2 - (x + x^2)^2 - x(x + x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2-\left(x^2+x^4+2x^3\right)-\left(x^2+x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4+x^3}=1$$

C) Si calculamos los límites radiales:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\\ m\neq 1,-2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2-(mx)^2-x(mx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-m^2-m}=0$$

Vemos que la función no es continua en el origen ya que aunque todos tienen el mismo valor no coincide con el límite según la dirección del apartado b)-

Por no ser continua, tampoco puede ser diferenciable, ya que toda función diferenciable en un punto debe ser continua en él.

D) Calculamos las derivadas parciales pedidas:

$$f_x'(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{2t^2}}{t}=\frac{1}{2}$$

Para calcular

$$f_{yx}''(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}$$

debemos calcular primero $f_y'(0,0)$ y $f_y'(t,0)$:

- $f_y'(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$

- $f_y'(x,y)=\frac{-x^3(-2y-x)}{\left(2x^2-y^2-xy\right)^2}=\frac{x^3(2y+x)}{\left(2x^2-y^2-xy\right)^2}\quad si\ (x,y)\neq(0,0)$
- $\Rightarrow f'_y(t,0)=\frac{x^4}{\left(2x^2\right)^2}=\frac{1}{4}$

Ahora,

$$f_{yx}'(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f'_y(t,0)-f'_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}-0}{t}=\pm\infty$$

luego no existe $f''_{yx}(0,0)$

E) En P (2,-1), f(x, y) es diferenciable, ya que se trata de una función racional con denominador no nulo.

Podemos por tanto calcular, $D_{\vec{u}}f(2,-1) = \left\langle \nabla f(2,-1), \vec{u} \right\rangle$

- Calculemos $\nabla f(2,-1)$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x^4 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{\left(2x^2 - y^2 - xy\right)^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{x^3(2y+x)}{\left(2x^2 - y^2 - xy\right)^2}$$

$$f'_x(2,-1) = \frac{2^5 - 3\cdot 4 + 2\cdot 2^3}{81} = \frac{4}{9} \qquad f'_y(2,-1) = \frac{8(-2+2)}{81} = 0$$

- $\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}, sen\,\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

luego, $D_{\vec{u}}f(2,-1) = \left\langle \left(\frac{4}{9}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = \frac{2}{9}$

Nota: También se puede recurrir a la definición de derivada direccional, pero lleva más operaciones.

14 Se considera la función real de dos variables

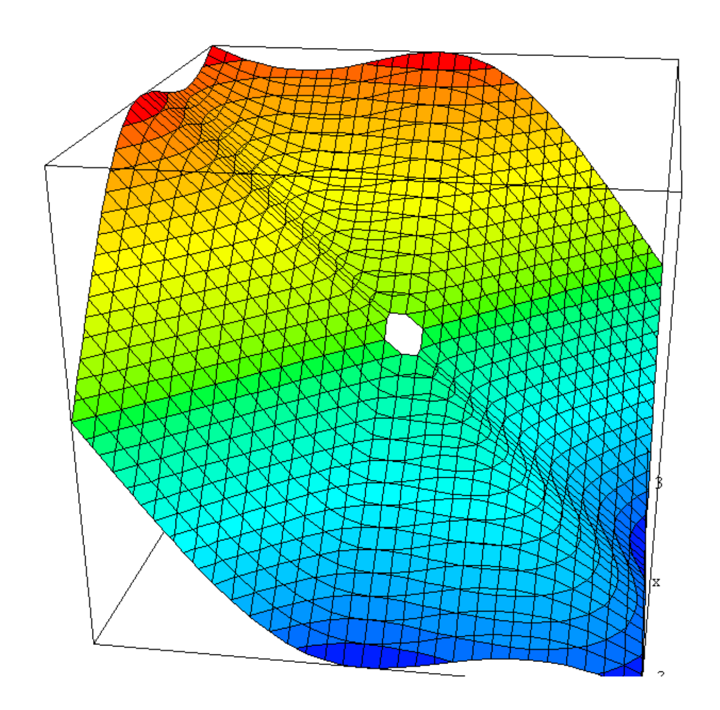
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudia, mediante la definición, para qué vectores unitarios u existe la derivada direccional de f en el origen, $D_u f(0,0)$. Calcula dicha derivada direccional.

(b) ¿Cuánto vale el gradiente de f en el origen?

(c) Estudia la diferenciabilidad en el origen

(d) A partir del valor obtenido en (a) calcula el valor máximo de $D_u f(0,0)$, y la dirección u de forma que $D_u f(0,0)$ es máxima.



Solución:

(a) Se considera el vector unitario $u = \left(\cos\varphi, sen\varphi\right)$ utilizando la definición

$$D_u f\left(0,0\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(t\cos\varphi, t sen\varphi\right) - f\left(0,0\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3\left(\cos^3\varphi + sen^3\varphi\right)}{t^2} - 0}{t} = \cos^3\varphi + sen^3\varphi$$

(b) $$\nabla f\left(0,0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)\vec{i}$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(t,0\right) - f\left(0,0\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(0,t\right) - f\left(0,0\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0 + \dfrac{t^3}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

Por lo tanto, $\nabla f\left(0,0\right) = \vec{i} + \vec{j}$.

(c) La función no es diferenciable en el origen porque en caso de ser diferenciable se tendría que

$$D_u f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), u \rangle = \langle \vec{i} + \vec{j}, \cos\varphi \vec{i} + sen\varphi \vec{j} \rangle = \cos\varphi + sen\varphi$$

y por el apartado (a) la derivada direccional es $D_u f(0,0) = \cos^3\varphi + sen^3\varphi$.

(d) La derivada direccional $D_u f(0,0) = \cos^3\varphi + sen^3\varphi$ es una función de φ, $h(\varphi) = \cos^3\varphi + sen^3\varphi$, que es derivable, por lo tanto, el valor más grande se alcanzará cuando

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= -3\cos^2\varphi sen\varphi + 3sen^2\varphi\cos\varphi = \\ &= 3sen\varphi\cos\varphi(-\cos\varphi + sen\varphi) = 0 \end{aligned}$$

$$h'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} sen\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 & \varphi_2 = \pi \\ \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \dfrac{\pi}{2} & \varphi_4 = \dfrac{3\pi}{2} \\ sen\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi_5 = \dfrac{\pi}{4} & \varphi_6 = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Como

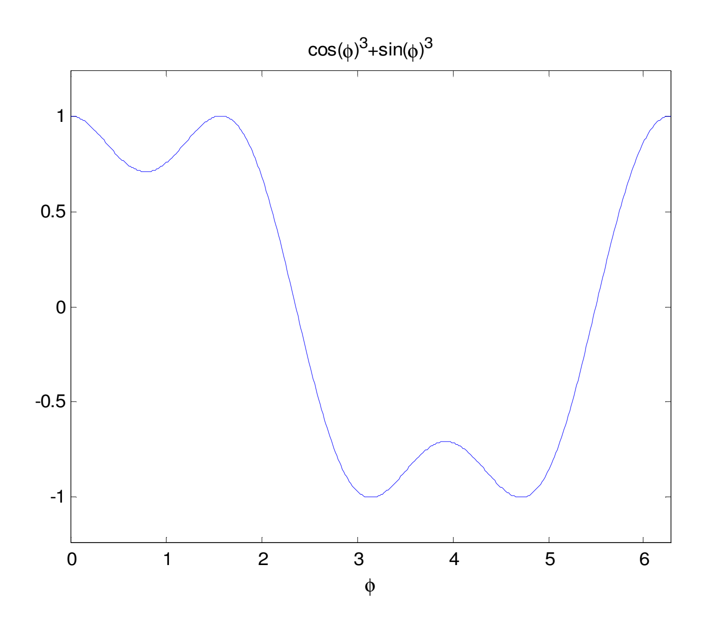
$$\begin{aligned} h''(\varphi) = {} & 3\cos^2\varphi(-\cos\varphi + sen\varphi) - 3sen^2\varphi(-\cos\varphi + sen\varphi) \\ & +3sen\varphi\cos\varphi(sen\varphi + \cos\varphi) \end{aligned}$$

se tiene que los máximos y mínimos relativos son:

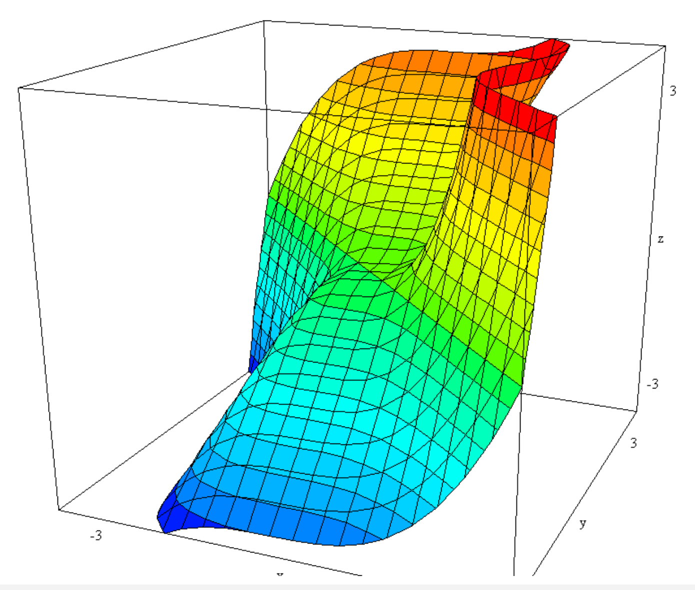
$$\begin{array}{llll} h''(0) < 0, & h''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0, & h''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) < 0 & \quad MAXIMO \\ h''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) > 0, & h''(\pi) > 0, & h''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) > 0 & \quad MINIMO \end{array}$$

El máximo absoluto es en la dirección del eje positivo de las X o de las Y

$$u = (\cos 0, sen 0) = (1,0) \quad ó \quad u = \left(\cos\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$$



La representación de la función es:



15 Se considera la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x sen(xy)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

(a) Estudiar la continuidad de f en todo punto del plano.

(b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo $\mathbb{R}^2$

(c) Estudiar la derivada direccional de f en el origen en cualquier dirección

(d) ¿Es f diferenciable en el origen?

Solución:

(a) En los puntos del plano distintos del origen la función es continua por ser cociente de funciones continuas con denominador no nulo.

En el origen estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot sen(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \frac{\rho\cos\varphi \; sen\left(\rho^2 sen\varphi\cos\varphi\right)}{\rho^2} =$$

$$\underset{\left\{\substack{sen\alpha\simeq\alpha\\ si\ \alpha\to 0}\right\}}{=} \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \frac{\cos\varphi\left(\rho^2 sen\varphi\cos\varphi\right)}{\rho} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \rho sen\varphi\cos^2\varphi = 0 = f(0,0)$$

donde en el último límite se ha utilizado que el producto de un infinitésimo por una función acotada es cero.

Por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$

(b) Las derivadas parciales en puntos distintos del origen son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left[sen(xy) + xy\cos(xy)\right]\left(x^2+y^2\right) - 2x\left[xsen(xy)\right]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\left[x^2\cos(xy)\right]\left(x^2+y^2\right) - 2y\left[xsen(xy)\right]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

En el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot sen(0)}{t^2}-0}{t}\lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot sen(0)}{t^2}-0}{t}\lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

Por lo tanto las derivadas parciales de primer orden existen en todo $\mathbb{R}^2$

(c) Calculamos la derivada direccional en cualquier dirección $\vec{u} = (\cos\varphi, sen\varphi)$ utilizando la definición:

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos\varphi, 0+tsen\varphi) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t\cdot\cos\varphi\cdot sen\left(t^2 sen\varphi\cos\varphi\right)}{t^2\cos^2\varphi + t^2 sen^2\varphi} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t\cdot\cos\varphi\cdot\left(t^2 sen\varphi\cos\varphi\right)}{t^2} - 0}{t} = sen\varphi\cos^2\varphi$$

Luego, la derivada direccional de la función f en el origen en la dirección $\vec{u} = (\cos\varphi, sen\varphi)$ es $D_u f(0,0) = sen\varphi\cos^2\varphi$

(d)
Método 1: La función no es diferenciable en el origen porque la derivada direccional en el origen no es el producto escalar del gradiente en el origen por la dirección.
Método 2: Utilizando la definición de diferenciabilidad:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - \Delta x\cdot 0 - \Delta y\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\Delta x\cdot sen(\Delta x\cdot\Delta y)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x\cdot sen(\Delta x\cdot\Delta y)}{\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^{3/2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\cdot sen\varphi}{\rho^3} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \cos^2\varphi\cdot sen\varphi$$

Como el último límite no existe por depender de φ, el límite no es cero y en consecuencia la función no es diferenciable en el origen.

16 Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida de la forma: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se pide:

(a) Continuidad en (0,0)

(b) Diferenciabilidad en (0,0)

(a) Continuidad en (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi)}} \frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2} \underset{e^{\rho^2}-1\approx\rho^2\log e}{=} 1 = f(0,0)$$

Nota: En el último límite se puede aplicar también L'Hopital

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho e^{\rho^2}}{2\rho} = 1$$

(b) Diferenciabilidad en (0,0)

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{e^{(\Delta x)^2}-1}{(\Delta x)^2}-1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(\Delta x)^2}-1-(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3} \underset{L'Hopital}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)e^{(\Delta x)^2}-2(\Delta x)}{3(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2e^{(\Delta x)^2}-2}{3(\Delta x)} \underset{L'Hopital}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4(\Delta x)e^{(\Delta x)^2}}{3} = 0$$

Por simetría $f_y(0,0) = 0$.

Vemos si es diferenciable comprobando si se cumple:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\Delta x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

Como

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{e^{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} - 1 - 0\cdot\Delta x - 0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi)}} \frac{e^{\rho^2}-1-\rho^2}{\rho^3} = 0$$

la función es diferenciable en el origen.

Nota: Este último límite es el mismo que el de cálculo de la derivada parcial.

17 Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ (10 puntos)

(b) Calcular la derivada direccional en el punto (0, 0) según el vector $\vec{v}=(1,1)$, el vector $\vec{u}=(1,0)$ y el vector $\vec{u}=(0,1)$. (5 puntos)

Solución:

(a) Continuidad en (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\cdot sen\varphi}{\rho^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}} \underbrace{\rho}_{\inf initésimo} \underbrace{\cos^2\varphi\cdot sen\varphi}_{a\cot ado} = 0$$

como el valor del límite coincide con el valor de la función en el punto es una función continua en el origen.

En el resto de puntos (x,y) distintos de (0,0) la función es continua por ser cociente de funciones continuas con denominador no nulo en dichos puntos.

(b) **Diferenciabilidad en (0,0)**

En los puntos (x, y) distintos del origen la función tiene derivadas parciales

$$f_x(x,y) = \frac{2xy\left(x^2+y^2\right) - x^2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2y+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad si\ (x,y)\neq(0,0)$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2\left(x^2+y^2\right) - x^2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad si\ (x,y)\neq(0,0)$$

y además son continuas por ser cociente de funciones continuas con la función del denominador no nula en estos puntos (el denominador solo se anula si (x, y)=(0,0)). Por lo tanto la función f es diferenciable en todos los puntos distintos del origen.

En el origen

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Utilizando la definición vemos si es diferenciable:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x - f_y(0,0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{1+\frac{1}{2}}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\in[0,2\pi]}}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\right)^2(sen\varphi)}{\rho^3}$$

Que depende de φ, luego la función no es diferenciable en el origen.

Nota: También se puede calcular el límite por radiales y ver que depende de la pendiente de la recta por la que nos aproximemos al origen.

(b) **Derivadas direccionales:**

Al no ser la función diferenciable no es válida la expresión $D_u f(0,0) = \left\langle \nabla f(0,0), \vec{u}\right\rangle$ por lo que debemos aplicar la definición de derivada direccional

$$\vec{v} = (1,1) \qquad \rightarrow \qquad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

luego:

$$D_{\vec{u}}f\left(0,0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\frac{1}{\sqrt{2}},0+t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f\left(0,0\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}t\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}+\left(t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\frac{t^{3}}{2\sqrt{2}}}{t^{2}}}{t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

La derivada direccional en la dirección (1, 0) es la derivada parcial respecto a x y la derivada direccional en la dirección (0, 1) es la derivada parcial respecto a y calculadas anteriormente y cuyo valor en ambos casos es cero.

Plano tangente

18 De una función $z=f\left(x,y\right)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f\left(x,y\right)$ en el punto (1, 2) es: $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto (1, 2) con el punto (3,4)? Justificar la respuesta.

La dirección en la que nos piden calcular la derivada direccional es:

$$v=\left(3-1,4-2\right)=\left(2,2\right)\Rightarrow u=\frac{v}{\left\|v\right\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Como el plano tangente en el punto (1, 2) es

$$2x+3y+4z=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z=\frac{1}{4}\quad\text{(I)}$$

que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,2\right)\left(x-1\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,2\right)\left(y-2\right)=z-f\left(1,2\right)\quad\text{(II)}$$

se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-3}{4}$$

sin más que igualar los coeficientes en las dos expresiones (I) y (II)

Luego la derivada direccional pedida es:

$$D_u\left(f,(1,2)\right) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right), u \right\rangle = \left\langle \left(\frac{-1}{2}, -\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{-5}{4\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

Regla de la cadena. Derivación compuesta.

19 Sea $u = x^4 y + y^2 z^3 + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ donde

$$\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2 e^{-t} \\ z = r^2 s \ sent \end{cases}$$

Calcular $\frac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$ sabiendo que $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$

Solución.-

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= \left(4x^3 y + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right) re^t + \left(x^4 + 2yz^3 + +\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right) 2rse^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 sent$$

Para r=2, s=1, t=0 se tiene que x=3, y=2, z=0. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, así como $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, resulta que $\frac{\partial u}{\partial s} = 758$

20 Considerando $x = r\cos\varphi,\ y = rsen\varphi$ transformar $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi}$ utilizando coordenadas cartesianas, es decir, expresar $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi}$ en función de z, x e y y sus derivadas parciales.

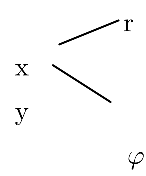
Solución:

Aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que $x = r\cos\varphi,\ y = rsen\varphi$ (inversamente $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$) se puede escribir,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}sen\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(-rsen\varphi\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(r\cos\varphi\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\left(-y\right) + \frac{\partial z}{\partial y}x$$

Derivando ahora respecto de r teniendo en cuenta que x e y dependen de r y φ



$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)}_{\substack{llamamos \\ A=\frac{\partial z}{\partial \varphi}}} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} =$$

$$= \left(-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2 \cdots}}$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$$

21 Dada $u = g\left(x, h\left(x, y\right)\right)$, $y = f\left(t\right)$, calcular la razón de cambio (derivada) de u respecto de t.

Solución.-

Llamamos $m = h\left(x, y\right)$, entonces el esquema de dependencia es

x

u $\qquad$ x

m

y $\qquad$ t

Luego aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

): Utilizar la regla de la cadena para probar

(a) $\frac{\partial h}{\partial x}$ siendo $h(x,y) = f(x,u(x,y))$. Poner **además** un ejemplo de función h (6 puntos).

Solución:

$h(x,y) = f(x,u(x,y)) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$

Por ejemplo

$$u = u(x,y) = xy$$
$$f(x,u) = x^2 + u^2$$
$$h(x,y) = f(x,u(x,y)) = x^2 + x^2y^2$$
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2uy = 2x + 2xyy = 2x + 2xy^2$$

(b) Calcular $\frac{dy}{dt}$ siendo $y = h(x) = f\left(x^2 + g(x) + g(2)\right)$, $x = sen(t)$. Poner **además** un ejemplo de función h (7 puntos).

Llamamos $u = x^2 + g(x) + g(2)$ entonces:

Y----u----x----t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(u)(2x + g'(x)) \cdot \cos t = f'\left(sen^2 t + g(sent) + g(2)\right)(2sent + g'(sent))\cos t$$

Ejemplo: $f(u) = u^2$, $g(x) = e^x$

$$y = h(x) = \left(x^2 + e^x + e^2\right)^2$$
$$y = h_1(t) = \left(\left(sen^2 t\right)^2 + e^{sent} + e^2\right)^2$$

22 Calcular la expresión de las derivadas parciales respecto a “x” y a “y” de la función:

$$\omega = f\left(g\left(x^2\right) + h(y), g(x)h(y)\right)$$

Considerando que g y h son funciones derivables y que f es una función diferenciable.

Se trata de calcular las derivadas parciales de $\omega = f(u,v)$ siendo

$$u = g(x^2) + h(y) \qquad v = g(x)h(y)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot g'(x^2) \cdot 2x + \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot g'(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot h'(y) + \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot g(x) \cdot h'(y)$$

23 La temperatura de una placa viene dada por $T(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x^2y^2}$

(a) ¿En qué dirección tendríamos que desplazarnos desde el punto (1,1) para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? Justificar la respuesta.

(b) ¿En qué dirección desde el mismo punto la variación de la temperatura es ¼? Justificar la respuesta.

(c) Dada la curva en paramétricas $\varphi(t) = (\cos t, 1 + sent)$ calcular el vector tangente a la curva en t=0.

(d) Calcular $(T \circ \varphi)'(0)$. ¿Qué representa dicho valor?

Solución:

(a) Las derivadas parciales de T son

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = -\frac{(1-y)2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -\frac{-1-2x^2y+x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

La dirección para que la temperatura decrezca lo más rápidamente es el vector

$$u = -\frac{\nabla T(1,1)}{\|\nabla T(1,1)\|}$$

Calculando el gradiente en el punto (1,1)

$$\nabla T(1,1) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(1,1), \frac{\partial T}{\partial y}(1,1)\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

luego

$$u = (0,1)$$

(b) Como la función es diferenciable se trata de encontrar el vector $v = (\cos\varphi, sen\varphi)$ de manera que

$$D_v\left(f,(1,1)\right) = \left\langle \nabla T(1,1), (\cos\varphi, sen\varphi)\right\rangle = \frac{1}{4}$$

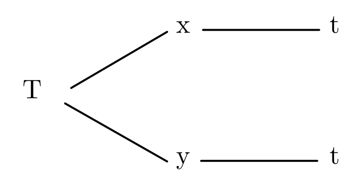
$$-\frac{sen\varphi}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow sen\varphi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ ó } \varphi = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{6}$$

(c) El vector tangente a la curva en t=0 es

$$\varphi'(t) = (-sent, \cos t) \Rightarrow \varphi'(0) = (0,1)$$

(d) Se tiene que $(T \circ \varphi)(t) = T(\varphi(t))$ y por lo tanto esta función evalúa la temperatura en los puntos de la curva dada en paramétricas. $(T \circ \varphi)'(0)$ calcula la variación de la temperatura respecto al parámetro t en el punto de la curva $\varphi(0) = (\cos 0, 1 + sen0) = (1,1)$.

La dependencia de las variables es: T=T(x,y) con x=x(t)=cost, y=y(t)=1+sent



Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{(1-y)2xy^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}(-sent) + \frac{-1+x^2y^2-2x^2y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}\cos t$$

Sustituyendo t=0, x=cos0=1, y=sen0=0 se tiene que

$$(T \circ \varphi)'(0) = -1$$

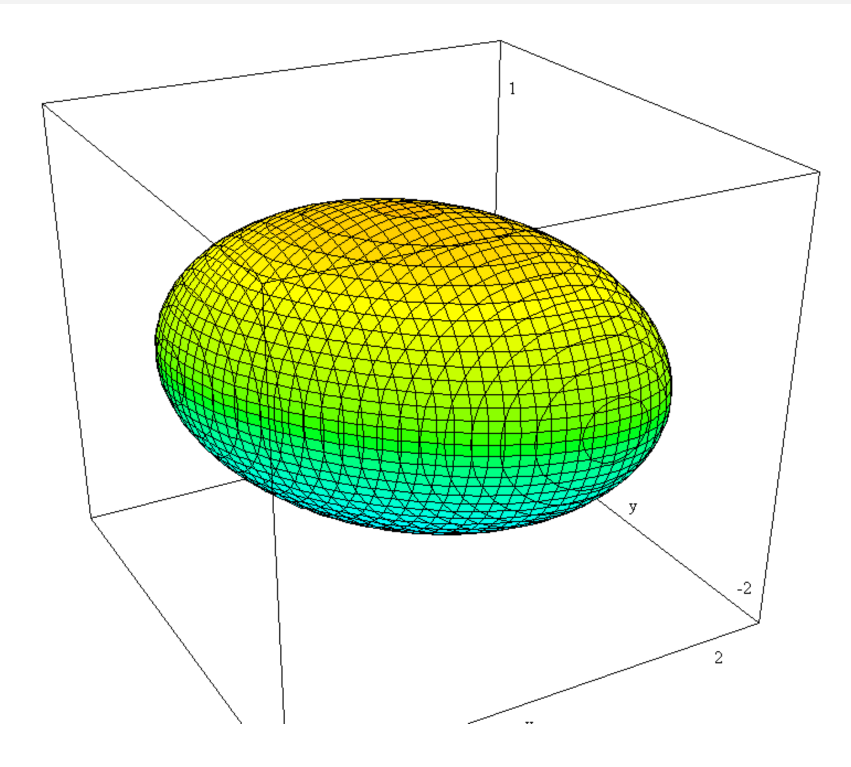
Derivación implícita

24 Dada $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1$, se pide:

A) determinar si $F(x,y,z) = 0$ define en el punto P (0,-1,0) a z como función implícita de x e y, es decir, z = f(x, y)

B) Encontrar las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función z=f(x,y) en el punto (0,-1)

C) Hallar en (0,-1) el valor de dz y d^2z cuando dx = dy = 0.2.



SOLUCION:

A) $F(x,y,z) = 0$ define a z = f(x, y) en un entorno de P (0,-1,0) si

- El punto P es un punto de la superficie, es decir, F (0,-1,0) = 0. En efecto,

  F (0,-1,0) = 1 -1 = 0

- Fx, Fy, Fz son continuas en un entorno de P. Es evidente ya que

$$F_x(x,y,z) = 2x + y$$
$$F_y(x,y,z) = 2y + x$$

$$F_z\left(x,y,z\right) = 2z + 2$$

son funciones polinómicas

- $F_z\left(0,-1,0\right) \neq 0$. Como $F_z\left(x,y,z\right) = 2z + 2$ se tiene $F_z\left(0,-1,0\right) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$

B) Para calcular las derivadas parciales de primer orden derivamos implícitamente la función $F\left(x,y,z\right) = 0$:

Respecto a x:

(1) $$2x + 2z\,z_x + y + 2z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{2x+y}{2z+2}$$

Respecto a y:

(2) $$2y + 2z\,z_y + x + 2z_y = 0 \Rightarrow z_y = -\frac{2y+x}{2z+2}$$

Para calcular las derivadas de segundo orden basta derivar (1) y (2) respecto a x e y nuevamente:

$$2 + 2z_x\,z_x + 2zz_{xx} + 2z_{xx} = 0 \Rightarrow z_{xx} = -\frac{2+2\left(z_x\right)^2}{2z+2}$$

$$2z_y\,z_x + 2zz_{xy} + 1 + 2z_{xy} = 0 \Rightarrow z_{xy} = -\frac{2z_y z_x + 1}{2z+2}$$

$$2z_x z_y + 2zz_{yx} + 1 + 2z_{yx} = 0 \Rightarrow z_{yx} = -\frac{2z_x z_y + 1}{2z+2}$$

$$2 + 2z_y\,z_y + 2zz_{yy} + 2z_{yy} = 0 \Rightarrow z_{yy} = -\frac{2+2\left(z_y\right)^2}{2z+2}$$

Sustituyendo en (x, y)=(0, -1) (con z=0) se tendrá.

$$z_x\left(0,-1\right) = \frac{1}{2} \qquad z_y\left(0,-1\right) = \frac{2}{2} = 1$$

$$z_{xx}\left(0,-1\right) = -\frac{2+2\left(\frac{1}{4}\right)}{2} = -\frac{5}{4}$$

$$z_{xy}\left(0,-1\right)=-\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+1}{2}=-1=z_{yx}\left(0,-1\right)$$
$$z_{yy}\left(0,-1\right)=-\frac{2+2\cdot 1}{2}=-2$$

C) Para calcular la diferencial:

$$dz=z_x dx+z_y dy=\frac{1}{2}\left(0,2\right)+1\left(0,2\right)=0.3$$

$$d^2z=z_{xx}\left(dx\right)^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}\left(dy\right)^2=-\frac{5}{4}\frac{1}{5^2}+2\left(-1\right)\frac{1}{5^2}+\left(-2\right)\frac{1}{5^2}=$$
$$=\frac{1}{5^2}\frac{-21}{4}=\frac{-21}{4*25}=-0.21$$

TESTS

25 Supongamos que estamos sobre el punto $P(-1,5,8)$ en una colina cuya ecuación es $z=74-x^2-7xy-4y^2$. El eje Y señala hacia el norte y el eje X hacia el este, y las distancias se miden en metros.

☐ (a) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noroeste

☒ (b) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el suroeste

☐ (c) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noreste

☐ (d) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el sureste

N
NO NE
O E
SO SE
S

Solución.-

Se tiene que:

$(-1,\ 5,8)$ verifica la ecuación $z = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$ (está en la colina).

Además

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - 7y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\left(-1,5\right) = 2 - 35 = -33$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -7x - 8y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(-1,5\right) = 7 - 40 = -33$$

Luego la dirección donde hay máxima pendiente es:

$$\frac{\nabla f\left(-1,5\right)}{\left\|\nabla f\left(-1,5\right)\right\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

26 Sea $f\left(x,y\right)$, una función continua con derivadas parciales primeras y segundas continuas en todo $\mathbb{R}^2$, tal que su polinomio de Taylor de orden 2 desarrollado en el punto (1, -1) es

$$P_2\left(x,y\right) = 2 + \left(x-1\right) - 2\left(y+1\right) + 6\left(x-1\right)\left(y+1\right)$$

Entonces la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto (1, -1, 2) es:

$$z = 2 + \left(x-1\right) - 2\left(y+1\right)$$

(a) Falso, el plano tangente tiene como ecuación $z = 2 + \left(x-1\right) - 2\left(y+1\right) + 6\left(x-1\right)\left(y+1\right)$

(b) Falso, pues no podemos calcular la ecuación del plano tangente con los datos del problema.

(c) Falso, pues no podemos determinar si el punto (1,-1,2) pertenece a la gráfica de f.

(d) Verdadero, ya que $f\left(1,-1\right) = 2,\ \nabla f\left(1,-1\right) = \left(1,-2\right)$.

Solución: (d) Por definición el polinomio de Taylor de grado 2 con derivadas parciales primeras y segundas continuas en todo $\mathbb{R}^2$ (se cumple por tanto las hipótesis del teorema de Shwartz: $f_{xy} = f_{yx}$)

$$P_2\left(x,y\right) = f\left(1,-1\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,-1\right)\left(x-1\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,-1\right)\left(y+1\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1,-1\right)\left(x-1\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(1,-1\right)\left(x-1\right)\left(y+1\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1,-1\right)\left(y+1\right)^2\right]$$

Además por tener las derivadas parciales primeras continuas en el punto (1, -1) es diferenciable, y en consecuencia se puede calcular el plano tangente a la función en el punto (1, -1, f(1,-1))=(1, -1, 2)

27 Sea $f(x,y)$, una función con derivadas parciales primeras nulas en el punto (1, 1). Determina la afirmación correcta.

(a) Por tener derivadas parciales en el punto (1, 1) existe la derivada direccional de f en el punto (1, 1) en cualquier dirección.
(b) Por tener derivadas parciales en el punto (1, 1) es diferenciable en el punto (1, 1)
(c) Por tener derivadas parciales en el punto (1, 1) no se puede concluir que es continua en el punto (1, 1)
(e) La ecuación del plano tangente a la función f en el punto (1, 1) es un plano horizontal. .

Solución (c).
Se han visto en clase ejemplos de la falsedad de las afirmaciones (a), (b), (d) y de la certeza de la afirmación (c).

28 Sea $w = f(x,y,z) = x^2 y e^{1+z^2}$ donde $x = t^2 + t$, $y = t^2 + 1$, $z = t^5 + 2$, entonces se verifica para t=0 que:

$$\frac{dw}{dt}(0) = 0$$

(a) Verdadero, aplicando la regla de la cadena tenemos
$$\frac{dw}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\frac{dz}{dt}(0) = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$
(b) Verdadero, pues aplicando la regla de la cadena tenemos
$$\frac{dw}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2)\frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)\frac{dz}{dt}(0) = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$
(c) Falso, ya que w no es diferenciable en t=0 y por lo tanto no podemos aplicar la regla de la cadena.
(f) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta..

Solución (b) Para t=0 se tiene x=0, y=1, z=2. Es aplicación inmediata de la regla de la cadena.

29 Sea $z = f(x,y) = arctg(1 + x + y)$ utilizando la diferencial un valor aproximado de: $z = arctg(1 + 0'1 + 0'1)$ es:

(a) $\frac{\pi}{4} + 2\frac{10^{-1}}{1 + (1 + 2 \cdot 10^{-1})^2}$

(b) $2\frac{10^{-1}}{1 + (1 + 2 \cdot 10^{-1})^2}$

(c) $\frac{\pi}{4} + 10^{-1}$

(g) Ninguna de las anteriores

Solución: (c) Basta tener en cuenta que:

$$\Delta z = f(0'1, 0'1) - f(0,0) \approx 0'1 \cdot f_x(0,0) + 0'1 \cdot f_y(0,0)$$
$$f(0'1, 0'1) \approx f(0,0) + 0'1 \cdot f_x(0,0) + 0'1 \cdot f_y(0,0)$$

Como

$$f(0,0) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1 + (1 + x + y)^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{1 + (1 + x + y)^2}$$

Se tiene que:

$$arctg(1 + 0'1 \cdot 2) \approx \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{0'1}{2}$$

30 Sea $z = f(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 4y - 2x + 5}{x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 9}$ se puede afirmar que los límites radiales de la función f en el punto (1,-2):

(a) no existen

(b) son todos iguales y valen cero.

(c) son todos iguales y valen 5/9

(h) dependen de la pendiente de la recta que se considere.

Solución (d)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-2)\\ y+2=m(x-1)}} \frac{x^2 + y^2 + 4y - 2x + 5}{x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 9} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + (-2 + m(x-1))^2 + 4(-2 + m(x-1)) - 2x + 5}{x^2 + 2(-2 + m(x-1))^2 - 2x + 8(-2 + m(x-1)) + 9} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4 + m^2(x-1)^2 - 4m(x-1) - 8 + 4m(x-1) - 2x + 5}{x^2 + 8 + 2m^2(x-1)^2 - 8m(x-1) - 2x - 16 + 8m(x-1) + 9} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + m^2(x-1)^2 + 1 - 2x}{x^2 + 2m^2(x-1)^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 + m^2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 2m^2(x-1)^2} = \frac{1+m^2}{1+2m^2}$$

31 Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto (1, 2) siendo C la curva intersección de la superficie dada por $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ y el plano x=1.

(a) $\{x = 1, y = 2 + \lambda, z = -3 - 4\lambda$

(b) $\{x = 1 + \lambda, y = 2, z = -3 + 2\lambda$

(c) $\{x = 1, y = 2 + \lambda, z = -3$

(d) ninguna de las anteriores

Solución (a): Se trata de la ecuación que pasa por el punto (1, 2, f(1,2))=(1,2,-3) y tiene como pendiente la derivada parcial $f_y(1,0)$. Un vector director de esta recta es $\vec{v} = (0,1,f_y(1,2))$, la recta es:

$$\{x = 1, y = 2 + \lambda, z = -3 - 4\lambda$$

Ya que $f_y(x,y) = -2y$

32 Sea $z = f(x,y)$ una función continua y con derivadas parciales continuas en el punto (1, 2) entonces si $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1$ entonces

☐ (a) la dirección de máximo crecimiento de la función en ese punto es la norma del gradiente.

☐ (b) si desde el punto (1, 2) nos vamos en la dirección del eje y positivo el valor de z aumenta

☒ (c) sea S el plano tangente a la superficie dada por $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,f(a,b))$, entonces un vector normal a S en el punto $(1,2,f(a,b))$ es $\vec{n} = (-1,-1,1)$

☐ (d) ninguna de las anteriores.

Solución:

Un vector normal al plano tangente a la superficie dada por $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,f(a,b))$ es:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1\right) = (1,1,-1)$$

El vector $\vec{n} = (-1,-1,1)$ es proporcional al anterior.

33 Supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales continuas. Supongamos también que tiene derivada direccional máxima igual a 50 en P(1, 2), que se alcanza en la dirección de P a Q(3,-4). Utilizando esta información calcula $\nabla f(1,2)$

- ☐ (a) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
- ☐ (b) $\nabla f(1,2) = 50$
- ☒ (c) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{50}{\sqrt{10}}, -\frac{150}{\sqrt{10}}\right)$
- ☐ (d) ninguna de las anteriores

Solución

Como f es continua y tiene derivadas parciales continuas entonces es diferenciable en P. Por esta razón la derivada direccional se puede calcular como el producto escalar de la dirección y el vector gradiente. Además la derivada direccional máxima se alcanza en la dirección del gradiente

$$D_u f(1,2) = \|\nabla f(1,2)\| = 50 \qquad u = \frac{1}{\|\nabla f(1,2)\|}\nabla f(1,2)$$

El vector que une el punto P y Q es: $\overrightarrow{PQ} = (2,-6)$

Un vector unitario en esa dirección es: $u = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Por lo tanto, $\nabla f(1,2) = \|\nabla f(1,2)\| u = \left(\frac{50}{\sqrt{10}}, -\frac{150}{\sqrt{10}}\right)$

34 Sea C la curva de nivel que pasa por P(1, 1) de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Determina la pendiente en P(1,1) de la tangente a la curva C.

- [x] (a) -1
- [ ] (b) 0
- [ ] (c) 1
- [ ] (d) ninguna de las anteriores

Solución:

La curva C es la curva de nivel $K = x^2 + y^2$ para valor de $K = f(1,1) = (1)^2 + (1)^2 = 2$, es decir, es la curva,

$$2 = x^2 + y^2$$

Derivando implícitamente,

$$0 = 2x + 2yy'$$

en el punto (1, 1) la derivada es:

$$y' = \frac{-x}{y} = -1$$

Sea $z = f(u)$ una función derivable, $u = \frac{y}{x}$ entonces la expresión $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xy$ es

- [ ] (a) $f'\left(\frac{y}{x}\right)$
- [x] (b) xy
- [ ] (c) no se puede calcular si no se conoce la función f
- [ ] (d) ninguna de las anteriores

Solución:

Llamamos $u = \frac{y}{x}$, entonces la dependencia de variables es

$$z - - - u \begin{cases} x \\ y \end{cases}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du}\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sustituyendo,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{-y}{x}\right)\frac{dz}{du} + \frac{y}{x}\frac{dz}{du} = 0$$

35 Dada $z = x^2y + xy$ en el punto (1, 2) un vector perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por el punto (1,2) es

(a) (6,2)

(b) Paralelo al eje X

(c) Paralelo al eje Y

(d) Bisectriz del primer cuadrante

(e) Ninguna de las anteriores

Sol.- (a)

36 Sea $z = f\left(x \cdot g\left(y\right)\right)$ siendo f una función no constante. Si $x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ entonces

(a) $g\left(y\right) = g'\left(y\right)$

(b) $x = g\left(y\right)$

(c) $g\left(y'\right) = g\left(y\right)$

(f) Ninguna de las anteriores

Sol.- (a)

37 Se considera la función $f\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & si\ \left(x,y\right) = \left(0,0\right) \\ 0 & si\ \left(x,y\right) = \left(0,0\right) \end{cases}$

La derivada direccional de f en (0,0) siendo la dirección $\vec{u} = \left(\cos\varphi, sen\varphi\right)$ es

(a) $\cos^3\varphi + sen^3\varphi$ | (b) $\cos\varphi + sen\varphi$

(b) 0 | (d) Ninguna de las anteriores

Sol.- (a)

38 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) = (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Elige la respuesta correcta:

(a) $f(x,y)$ es continua en (0,0) ya que todos los límites direccionales por y=mx son 0

(b) $f(x,y)$ es continua en (0,0) porque existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(c) $f(x,y)$ no es continua en (0,0) porque aunque existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ no coinciden

(d) $f(x,y)$ es continua en (0,0) porque para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces $\left|\dfrac{4x^3}{x^2+y^2}\right| < \delta$

(e) Ninguna de las anteriores

Sol.- (d)

39 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) = (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Elige la respuesta correcta:

(a) $f(x,y)$ no es diferenciable en (0,0) ya que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(b) La derivada parcial de f respecto de x no es continua en (0,0)

(c) Es diferenciable en (0, 0) porque la derivada parcial de f respecto de x es continua en (0,0)

(f) Ninguna de las anteriores

Sol.- (b)

40 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) = (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Elige la respuesta correcta:

(a) $f_{xy}(0,0) = 0$

(b) Se cumple $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$

(c) No existe $f_{xy}(0,0)$
(d) Ninguna de las anteriores

Sol.- (a)

41 El plano tangente a la superficie gráfica de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) = (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) No puede determinarse con la información dada
(b) El plano tangente no se puede calcular porque la función f no es diferenciable
(c) Es el plano z=0
(d) Ninguna de las anteriores

Sol.-.

42 Si cortamos la superficie gráfica de la función $z = f(x,y) = xy + x^2$ por el plano y=2 se obtiene una curva cuya pendiente en el punto (1, 2, 3) es

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$
(b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
(c) $D_u f(0,0)$ siendo $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$
(g) Ninguna de las anteriores

Sol.- (a)

43 Sea f una función continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ tal que para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\nabla f(x,y) = (1 + 2xy, x^2 + 2y + 2)$. Entonces se verifica que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y además el valor máximo de la derivada direccional de f en el punto *(0,0)* se alcanza en la dirección del vector $\vec{v} = (1,2)$

(a) Falso, de las hipótesis del enunciado no podemos deducir que f sea una función

diferenciable.

(b) Falso, aunque f es diferenciable, sin embargo

$$f_{(1,2)}(0,0) = \nabla f(0,0).(1.2) = (1.2).(1.2) = 5 < f_{(0,8)}(0,0) = 6$$

ya que

$$f_{(0,8)}(0,0) = \nabla f(0,0).(8,0) = (1,2).(0,8) = 16$$

(c) Verdadero, f es diferenciable pues existen las derivadas parciales de f y son funciones continuas en todo R^2. Además como $\nabla f(0,0) = (1,2)$, entonces $D_v f$ alcanza su valor máximo cuando $\vec{v} = (1,2)$

(d) Ninguna de las anteriores

Sol.- (c)

44 Sea $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ donde $x = e^{u+v}$ e $y = u^2 + v$. Entonces se verifica que para u=0 y v=0 las derivadas parciales de z son $\frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = 2$ y $\frac{\partial z}{\partial v}(0,0) = 2$

(a) Falso, pues aplicando la regla de la cadena $\frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial v}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial x}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 0$$

(b) Falso, ya que no podemos aplicar la regla de la cadena ya que no existe $\frac{\partial z}{\partial u}(0,0)$

(c) Verdadero, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 2\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{\partial x}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 2\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2$$

(d) Ninguna de las anteriores

Nota: Si en la solución de algún ejercicio crees que hay algún error ponte en contacto con la profesora para su corrección.